

Gruppentheorie am 4-Rubikwürfel

Max Daniel, Benjamin Lipp, Jakob von Raumer

12. Januar 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Aufbau des 4-Würfels	3
2.1	Die Unterscheidbarkeitsfrage	3
2.1.1	Unterscheidbarkeit von Kantensteinen	3
2.1.2	Unterscheidbarkeit von Mittensteinen	4
3	Gruppentheorie am Rubikwürfel	5
4	Anzahl der möglichen Würfelpositionen	8
4.1	Mathematisch unterschiedliche Würfelpositionen	8
4.2	Optisch unterscheidbare Würfelpositionen	8
5	Die maximale Ordnung	10
5.1	Die Permutationsordnung	10
5.2	Mögliche Permutationsordnungen	11
5.3	Der Flipfaktor	12
5.3.1	Betrag des Flipfaktors	12
5.3.2	Eine Anwendungsregel für den Flipfaktor	12
5.4	Die maximale Ordnung und das Rekordmanöver	13
6	Schlusswort	14

1 Einleitung

Diese Jugend-Forscht-Arbeit über den 4-Würfel stellt die Ergebnisse einer Seminararbeit dar, die wir im Rahmen eines Projekts des Hector-Seminars in Kooperation mit der Universität Karlsruhe zu diesem Thema geschrieben haben. Bevor wir uns dort dem Rubikwürfel mit einer Kantenlänge von vier Steinen widmeten, der auch „*Revenge*“ genannt wird, haben wir in einem vorhergehenden Projekt den „normalen“ und bekannten Rubikwürfel, den 3-Würfel, in Bezug auf das mathematische Teilgebiet der Gruppentheorie untersucht. Nun möchten wir unsere Kenntnisse jedoch auf das nächste Element in der Kette anwenden und es unter gleichen und weiterführenden Aspekten analysieren. Dabei unterstützten uns nach wie vor Frau Dr. Schmithüsen und Herr Prof. Dr. Herrlich des Instituts für Algebra und Geometrie der mathematischen Fakultät.

Die mathematische Beschreibung des Würfels wollen wir dafür verwenden, einige Leitfragen zu beantworten. Die erste Fragestellung ist „*Wie viele verschiedene Würfelpositionen sind möglich?*“. Dabei stellen wir jedoch schnell fest, dass uns mehrere Ansichten zu unterschiedlichen Zielen führen und tatsächlich verschiedene – aber dennoch riesengroße – Zahlen als Ergebnis genannt werden können.

Die mathematische Beschreibung des 4-Würfels geschieht mit gruppentheoretischen Mitteln und lehnt sich stark an bekannte Beschreibungen des 3-Würfels an, jedoch kamen auch neue Fragen auf, denn der 4-Würfel unterscheidet sich in einigen Punkten von seinem Vorgänger: es gibt keine Achsen mehr – an ihre Stelle treten an jeder Seite jeweils vier optisch identische Mittelflächen – und außerdem finden sich an jeder Kante zwei Kantensteine statt einem, die sich zudem ebenfalls optisch gleichen. Eine weitere Fragestellung ist also „*Können die optisch nicht unterscheidbaren Steine untereinander vertauscht werden?*“. Wir stellen fest, dass dies auch Auswirkungen auf die anderen Fragestellungen hat.

Das Modell des 4-Würfels erlaubt es uns, Drehungen, Manöver und deren Auswirkungen auszurechnen, ohne wirklich zu drehen. Des Weiteren können wir feststellen, ob eine bestimmte Position des Würfels durch Drehungen erreichbar ist. Dies hat unmittelbare Relevanz für die Berechnung der Zahl der Würfelpositionen. Die Internetseite von Werner Randelshofer [5], der sich selbst viel mit den verschiedenen Varianten des Rubikwürfels beschäftigt, war uns eine sehr gute Quelle für existierende Manöver, die unsere Vermutungen und Beweise praktisch unterstützen. Da der Würfel mathematisch so gut beschreibbar ist, übertrugen wir unser Modell in das Computer-Algebra-System *GAP: Groups, Algorithms and Programming*, so dass wir schnell Manöver verknüpfen und wieder rückgängig machen können.

Als dritte Fragestellung bearbeiten wir die Frage, wie oft ein Manöver hintereinander ausgeführt werden muss, bis der Würfel wieder seine ursprüngliche Position erreicht hat, auch als „Ordnung“ bekannt, und wie groß diese Anzahl an Ausführungen mit komplizierten Manövern höchstens werden kann. Die Ordnung eines einzelnen Manövers ist vergleichsweise einfach zu bestimmen – im Zweifelsfall durch Ausprobieren; die Frage nach der größten *möglichen* Ordnung ist jedoch schwieriger zu beantworten. Die nächste Fragestellung ist „*Was ist die maximale Ordnung eines Manövers auf dem 4-Würfel?*“. Um die unendlich vielen Kombinationen von Manövern zu bewältigen, teilten wir das Problem in kleinere mathematische Portionen, die wir mit Beweisen lösen konnten und halfen uns mit kleinen selbstgeschriebenen Computerprogrammen. Nachdem wir eine Zahl für die maximale Ordnung ermittelt haben, die im Vergleich zu der des 3-Würfels schon größer ist, möchten wir natürlich auch ein entsprechendes Manöver mit dieser Ordnung finden. Das Manöver, das wir fanden, besteht aus nur 5 Drehungen und ist damit trotz seiner hohen Ordnung erstaunlich kurz.

2 Aufbau des 4-Würfels

Der 4-Würfel besteht aus 8 Eckensteinen mit je drei Flächen, 24 Mittensteinen mit je einer Fläche, davon 4 auf jeder Seite, und aus 24 Kantensteinen mit je 2 Flächen. Eine Außenfläche hat immer eine von sechs auf dem Rubikwürfel vorkommenden Farben (welche dies sind, hängt von der Herstellerfirma ab). Den Zustand des Würfels mit sechs einheitlich gefärbten Seiten, bei dem die gelbe Seite nach oben und die orangene nach vorne zeigt, definieren wir als „gelösten Würfel“ oder Identitätsposition; wir betrachten den Würfel also als Objekt mit einer festen Lage im Raum. Die einzelnen Steine wurden von uns nummeriert, um eine Veränderung der Würfelposition ohne größeren Schreibaufwand darstellen zu können.

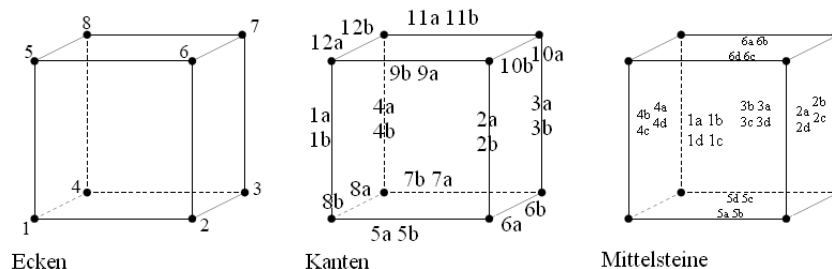


Abbildung 1: Der 4-Würfel in Zahlen

Es gibt 12 Scheiben, die gedreht werden können, um die Position der Steine zu verändern. Diese Drehungen definieren wir als *Grundmanöver* und bezeichnen sie mit $V_1, V_2, H_1, H_2, L_1, L_2, R_1, R_2, O_1, O_2, U_1, U_2$. Die Buchstaben bezeichnen die Seite (Vorne, Hinten, Links, Rechts, Oben, Unten) und die Nummern die Scheibe, wobei die äußerste Scheibe den Index 1 hat. Um das Manöver R_1 auszuführen, hält man den Würfel so, dass man auf die äußere rechte Scheibe blickt und führt eine 90° -Drehung im Uhrzeigersinn durch. Eine entsprechende Drehung gegen den Uhrzeigersinn wird in diesem Fall mit R_1^{-1} notiert. Ein Manöver besteht aus mehreren Drehungen. Manöver bezeichnen wir mit Großbuchstaben. Die Verknüpfung \circ steht für die Hintereinanderausführung, wobei in dieser Schreibweise von rechts nach links gelesen wird. Bei dem Beispiel $Z_0 := R_1 \circ L_1$ würde demnach zuerst L_1 und dann R_1 ausgeführt werden.

2.1 Die Unterscheidbarkeitsfrage

Bei Steinen, die optisch identisch sind, stellt sich die Frage, ob sie auf dem Würfel durch Manöver vertauscht werden können und also ohne zusätzliche Markierungen nicht mehr unterscheidbar sind. Es gibt auf dem 4-Würfel zwölf Paare von optisch identischen Kantensteinen und 6 mal 4 optisch identische Mittensteine. Wir definieren zwei Steine des Würfels als *ununterscheidbar*, wenn es zwei durch Manöver erreichbare Würfelpositionen gibt, die optisch gleich aussehen, sich tatsächlich jedoch durch eine Vertauschung dieser beiden Steine unterscheiden. Andernfalls, wenn es also keine zwei solchen Würfelpositionen gibt, heißen die Steine *unterscheidbar*.

2.1.1 Unterscheidbarkeit von Kantensteinen

Wenn die Kantensteine auf dem 4-Würfel ununterscheidbar wären, müsste es ein Manöver geben, das einen Kantenstein so auf die Position seines optisch identischen Bruders bringt, dass auch die Farben in dieselbe Richtung zeigen. Dies ist aber unmöglich, da eine Fläche eines Kantensteins durch alle Grundmanöver nur auf im

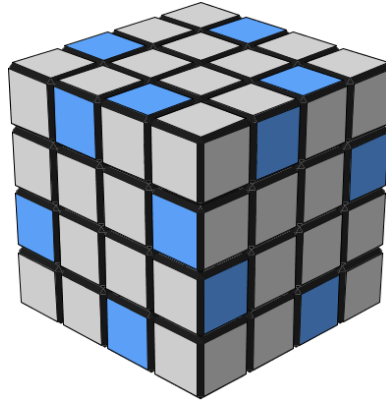


Abbildung 2: Blaue Flächen kommen durch Manöverausführungen wieder auf blauen Flächen zu liegen.

„Rösselsprung-Abstand“ befindliche Flächen zu liegen kommt. Deutlich wird das an einem wie in Abbildung 2 eingefärbten Würfel, der sich durch kein Manöver optisch verändern lässt.

Eingefärbte Flächen werden durch alle Grundmanöver wieder auf eingefärbte Flächen abgebildet. Somit ist gezeigt, dass die Kantensteine des 4-Würfels unterscheidbar, also an jeder Position eindeutig identifizierbar sind und nur gedreht auf ihren optisch identischen Bruder abgebildet werden können. Klar ist nun auch, dass Kantensteine nicht an ihrer Position gedreht werden können, wie es beim 3-Würfel der Fall ist.

2.1.2 Unterscheidbarkeit von Mittensteinen

Zunächst kann festgehalten werden, dass Mittensteine an ihrer Position nicht drehbar sind; ein Mittenstein hat immer dieselbe Orientierung zur Mitte der Würfelseite: kein Grundmanöver ändert die Drehung eines Mittensteins und somit auch kein zusammengesetztes Manöver.

Optisch identische Mittensteine lassen sich aber vertauschen, was durch ein konkretes Manöver belegt wird:

$$Z_1 := (V_1^2 \circ L_1^{-1} \circ R_1^{-1} \circ V_1 \circ R_1 \circ L_1)^2.$$

Dieses Manöver vertauscht auf der vorderen Seite des Würfels alle Mittensteine kreuzweise, alle anderen Steine bleiben unverändert. Optisch identische Mittensteine zu vertauschen, ist also prinzipiell möglich. Einschränkungen dieser Vertauschungen werden in folgenden Abschnitten geklärt.

3 Gruppentheorie am Rubikwürfel

Um die maximale Ordnung eines Manövers und die Anzahl der Würfelpositionen zu errechnen, mussten wir die Struktur des Würfels erst einmal brauchbar darstellen. Hierzu boten sich die Methoden der Gruppentheorie an, denn der Würfel, seine Positionen und seine Bewegungen können in vielerlei Hinsicht durch Gruppen, Permutationen und Homomorphismen beschrieben werden. Die Grundbegriffe der Gruppentheorie werden im folgenden Kapitel als bekannt vorausgesetzt, ihre Definitionen können in Lehrbüchern der Algebra wie zum Beispiel Siegfried Boschs „Algebra“ [1] nachgeschlagen werden. Auch die von uns geführten Beweise werden hier höchstens skizzenhaft aufgeführt, da sie sonst den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

Die unendliche Menge \mathcal{M} aller Manöver inklusive des „Nichtstuns“ $id_{\mathcal{M}}$ bildet einen Monoid mit der Hintereinanderausführung \circ , da $id_{\mathcal{M}}$ neutrales Element ist, \circ assoziativ und unter \mathcal{M} abgeschlossen ist. Jedes Manöver verursacht eine so genannte Bewegung.

Diese Bewegungen sind als Teilmenge der Selbstabbildungen des Würfels Elemente der Gruppe RWG (Rubikwürfelgruppe). Die Abbildung $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow RWG$ bildet jedes Manöver auf seine Bewegung in der Rubikwürfelgruppe ab. Doch die Elemente in RWG sind leider sehr schlecht zu handhaben, weshalb wir die Gruppe $\Psi := \{(p_E, p_M, p_K, x) | p_E \in \mathcal{S}_8, p_M \in \mathcal{S}_{24}, p_K \in \mathcal{S}_{24}, x \in \{0; 1; 2\}^8\}$ zu Hilfe nehmen. Deren 4-Tupel bestehen aus folgenden Einträgen:

- p_E , die Vertauschung der Eckensteine, dargestellt durch eine Permutation in der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_8
- p_M , die Vertauschung der Mittensteine als Permutation in \mathcal{S}_{24}
- p_K , die Vertauschung der Kantensteine als Permutation in \mathcal{S}_{24}
- x , die Flips der Eckensteine in der Form $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ mit $x_i \in \{0; 1; 2\}$. Da ein Eckenstein an seiner Position in drei verschiedenen Drehlagen liegen kann, reicht p_E nicht aus um seinen Zustand zu beschreiben. In dem Tupel befinden sich die *Flipzustände* der 8 Eckenpositionen: Wir nummerieren die Flächen der Eckensteine mit den Zahlen 0, 1 und 2. Der Flipzustand einer Eckenposition ist dann die Zahl der Fläche, die dort liegt, wo bei Identitätsposition die Fläche mit der Zahl 0 liegt. x_i gibt den Flipzustand der Ecke an Position i an.

Seien im Folgenden für ein $m = (p_E, p_K, p_M, x) \in \Psi$ der Einfachheit halber P_E, P_K, P_M und X definiert durch $P_E(m) := p_E, P_K(m) := p_K, P_M(m) := p_M$ und $X(m) := x$. Mit der Abbildung $\psi : RWG \rightarrow \Psi$ ordnen wir den Elementen von RWG ihre Bewegungen in Ψ zu.

Satz. Ψ wird zusammen mit der Verknüpfung $*$ zu einer Gruppe, wobei $*$ wie folgt definiert ist: $m * m' := (p_E \circ p'_E, p_K \circ p'_K, p_M \circ p'_M, x \oplus x')$ für alle $m = (p_E, p_K, p_M, x)$ und $m' = (p'_E, p'_K, p'_M, x')$. Dabei ist $x \oplus x'$ für $x := (x_1, \dots, x_8)$ und $x' := (x'_1, \dots, x'_8)$ durch $((x_{P'_E(m)(1)} + x'_1) \bmod 3, \dots, (x_{P'_E(m)(8)} + x'_8) \bmod 3)$ gegeben.

Ψ enthält aber auch Bewegungen, die nicht wirklich auf dem Würfel realisierbar sind. Will man nur die ausführbaren Bewegungen betrachten, muss man sich auf $W := Bild(\psi) \subset \Psi$ beschränken. Für unsere beiden zentralen Fragestellungen war es wichtig, von jeder Bewegung zu wissen, ob sie in W liegt oder nicht, für welche Bewegung $m \in \Psi$ es also ein $M \in \mathcal{M}$ gibt mit $m = \psi(\Phi(M))$ und eventuell auch, wie dieses M aussieht. Elemente von W nennen wir *echte Bewegungen*.

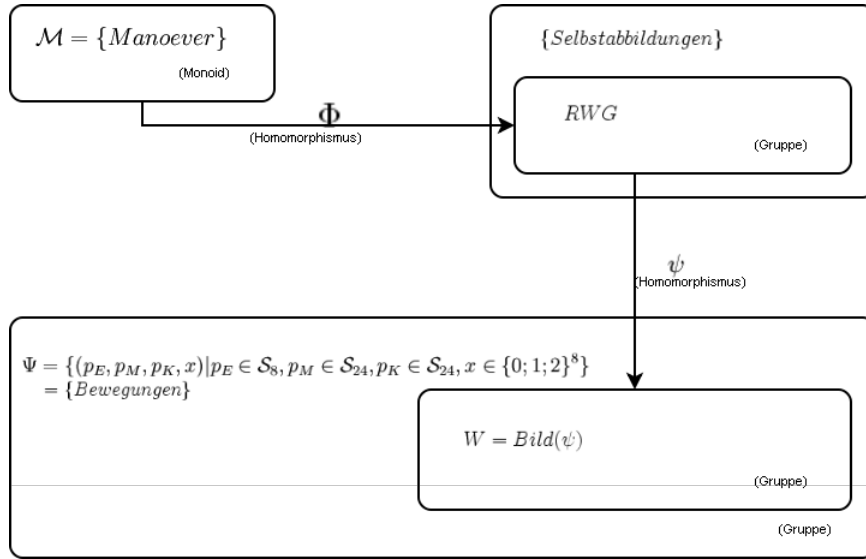


Abbildung 3: Die Gruppenstruktur, dargestellt als Diagramm

Bewegungen bezeichnen wir mit Kleinbuchstaben, wobei, soweit nicht anders angegeben, die von einem Manöver bewirkte Bewegung mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet wird; so ist bei Verwendung von $M_4 \in \mathcal{M}$ und $m_4 \in \Psi$ beispielsweise $m_4 = \psi(\Phi(M_4))$.

Für die Elemente von Ψ haben wir folgendes herausgefunden:

- Ein Eckenflip $x := (x_1, \dots, x_8)$ ist genau dann auf dem Würfel realisierbar, wenn gilt $x_1 + \dots + x_8 \equiv 0 \pmod{3}$
- P_E, P_K und P_M sind Homomorphismen
- Die Menge der reinen Flips $F := \{m \in \Psi \mid P_E(m) = \text{id}, P_K(m) = \text{id}, P_M(m) = \text{id}\}$ ist eine Untergruppe von Ψ
- $\mathcal{X} : F \rightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8 : (p_E, p_K, p_M, (x_1, \dots, x_8)) \mapsto ([x_1], \dots, [x_8])$ ist ein Isomorphismus $\Rightarrow F \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8$

Wie aus der Algebra bekannt, sind alle Permutationen in \mathcal{S}_n als Verkettung von Transpositionen darstellbar. Wenn man eine Permutation erst als Produkt von disjunkten Zykeln und diese wiederum als Produkt von Transpositionen schreibt, erhält man je nach Permutation eine unterschiedliche Zahl an Transpositionen. Eine Permutation heißt *gerade*, wenn diese Anzahl gerade ist und *ungerade*, falls sie ungerade ist. Nützlich ist nun die Abbildung $\sigma : \mathcal{S}_n \rightarrow \{1; -1\}$, die gerade Permutationen auf 1 und ungerade Permutationen auf -1 abbildet. σ ist ein Gruppenhomomorphismus von (\mathcal{S}_n, \circ) auf $(\{1; -1\}, \cdot)$.

Doch was hat σ mit dem 4-Würfel zu tun? Jedes Manöver $M \in \mathcal{M}$ ist eine Verkettung von Grundmanövern wie R_1, O_2 , etc., also werfen wir einen Blick auf

die σ -Werte der Grundmanöver:

	P_E	$\sigma(P_E)$	P_M	$\sigma(P_M)$	$\sigma(P_E) \cdot \sigma(P_M)$
V_1	(1 5 6 2)	-1	(1a 1b 1c 1d)	-1	+1
V_2	<i>id</i>	+1	(2a 5b 4c 6d)(2d 5a 4b 6c)	+1	+1
H_1	(3 7 8 4)	-1	(3a 3b 3c 3d)	-1	+1
H_2	<i>id</i>	+1	(2b 6a 4d 5c)(2c 6b 4a 5d)	+1	+1
L_1	(5 1 4 8)	-1	(4a 4b 4c 4d)	-1	+1
L_2	<i>id</i>	+1	(1a 5a 3c 6a)(1d 5b 3b 6d)	+1	+1
R_1	(2 6 7 3)	-1	(2a 2b 2c 2d)	-1	+1
R_2	<i>id</i>	+1	(1b 6b 3d 5b)(1c 6c 3a 5c)	+1	+1
O_1	(5 8 7 6)	-1	(6a 6b 6c 6d)	-1	+1
O_2	<i>id</i>	+1	(1a 4a 3a 2a)(1b 4b 3b 2b)	+1	+1
U_1	(1 2 3 4)	-1	(5a 5b 5c 5d)	-1	+1
U_2	<i>id</i>	+1	(1c 2c 3c 4c)(1d 2d 3d 4d)	+1	+1

Wie man also sieht, gilt für die Bewegungen m aller Grundmanöver $\sigma(P_E(m)) \cdot \sigma(P_M(m)) = 1$.

Satz. Da σ ein Homomorphismus ist, gilt auch für Verknüpfungen von Grundmanövern (und damit für alle Manöver), dass das Produkt der σ -Werte von Ecken- und Mittenpermutationen 1 ergibt.

Es können also nur Bewegungen durchgeführt werden, bei denen diese *Signum-Bedingung* gilt. Doch ist dies die einzige Bedingung für die Durchführbarkeit einer Bewegung?

Zunächst muss gezeigt werden, dass die Realisierbarkeit einer Bewegung tatsächlich unabhängig von der Kantenpermutation ist, die ja nicht in der Signum-Bedingung vorkommt, dass also alle Kantenpermutationen realisierbar sind. Dazu verwenden wir zwei konkrete Manöver, die auf den Kanten bestimmte Transpositionen bewirken:

$$Z_2 := U_2^{-1} \circ R_1^2 \circ O_2 \circ V_1^2 \circ O_2^{-1} \circ V_1^2 \circ U_2^2 \circ R_1^2 \circ U_2 \circ R_1^2 \circ U_2^{-1} \circ R_1^2 \circ V_1^2 \circ U_2^2 \circ V_1^2$$

$$Z_3' := O_1 \circ V_1 \circ R_1^{-1} \circ V_2^2 \circ R_1 \circ V_1^{-1} \circ R_1^{-1} \circ V_2^2 \circ R_1 \circ O_1^{-1}$$

$$Z_3 := (Z_3')^2 \circ W_R^{-1} \circ Z_2 \circ W_R \circ Z_3'$$

mit $P_E(z_2) = \text{id}$, $P_K(z_2) = (2a 10a)$, $P_M(z_2) = \text{id}$ sowie $P_E(z_3) = \text{id}$, $P_K(z_3) = (2a 2b)$, $P_M(z_3) = \text{id}$.

Dadurch, dass man zwei Kanten, die man vertauschen möchte, nebeneinander bringt, Z_3 anwendet und dann die Positionierungsmanöver rückgängig macht, kann man alle Tranpositionen und somit auch alle Permutationen bewerkstelligen.

Bleibt noch zu zeigen, dass alle Permutationen von Ecken- und Mittensteinen, bei denen die Signum-Bedingung erfüllt ist, auch durchführbar sind. Dies macht man, indem man zuerst zeigt, dass alle geraden Permutationen auf den Ecken und alle geraden Permutationen auf den Mitten möglich sind. Hierbei reicht es, zu zeigen, dass alle 3-Zykel möglich sind, denn die 3-Zykel erzeugen die Gruppe aller geraden Permutationen. Um auch zu zeigen, dass alle geraden Kombinationen aus Ecken- und Mittenpermutationen realisierbar sind, fügt man an das Manöver künstlich noch die Drehung einer der äußeren Scheiben hinzu, was dazu führt, dass auch Kombinationen aus ungeraden Permutationen gerade werden. Die hinzugefügte Drehung kann offensichtlich wieder rückgängig gemacht werden.

Somit ist der zentrale Satz unserer gruppentheoretischen Betrachtung des 4-Würfels gezeigt:

Satz. Für ein beliebiges $m := (p_E, p_K, p_M, x := (x_1, \dots, x_8)) \in \Psi$ gilt: m ist genau dann durch ein Manöver darstellbar, wenn $\sigma(P_E(m)) \cdot \sigma(P_M(m)) = 1$ und $x_1 + \dots + x_8 \equiv 0 \pmod{3}$ gelten.

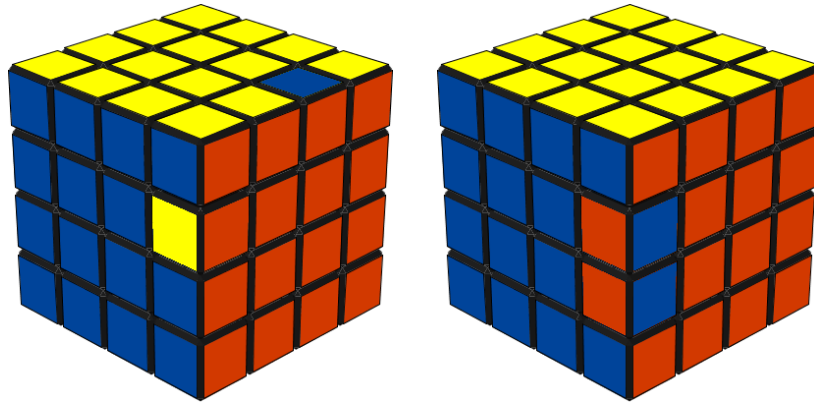


Abbildung 4: Die Ergebnisse von Z_2 und Z_3

4 Anzahl der möglichen Würfelpositionen

Mit den aus der Gruppentheorie gewonnenen Erkenntnissen wollten wir nun die Anzahl der möglichen Würfelpositionen berechnen. Doch wann sind zwei Würfelpositionen verschieden? Im Kapitel über die Unterscheidbarkeit von Steinen ist klar geworden, dass es Vertauschungen gibt, die man nicht bemerkt, wenn man den Würfel vor sich hat. Beim 4-Würfel sind dies die Vertauschungen gleichfarbiger Mittensteine. Wir müssen also unterscheiden zwischen *mathematisch beschreibbaren Positionen* und *optisch unterscheidbaren Positionen*.

4.1 Mathematisch unterschiedliche Würfelpositionen

Es können 8 Eckensteine, 24 Kantensteine und 24 Mittensteine permutiert werden. Dafür gibt es zunächst $8! \cdot 24! \cdot 24!$ Möglichkeiten, allerdings schließt die Signum-Bedingung genau jede zweite davon aus. Dazu kommen noch die Eckenflips: Theoretisch möglich wären 3^8 Eckenflips, allerdings teilt die Flip-Bedingung diese Zahl noch einmal durch 3. Somit ergibt sich als Anzahl der möglichen mathematisch beschreibbaren Würfelpositionen:

$$\begin{aligned}
 |W| &= \frac{8! \cdot 24! \cdot 24!}{2} \cdot \frac{3^8}{3} \\
 &= 16.972.688.908.618.238.933.770.849.245.964.147.960.401.887.232.000.000.000 \\
 &\approx 1,7 \cdot 10^{55}.
 \end{aligned}$$

4.2 Optisch unterscheidbare Würfelpositionen

Es gibt weniger optische Würfelpositionen als mathematische. Wir müssen die Zahl von oben durch die Anzahl der optisch identischen Mittenpermutationen teilen, die ausführbar sind. Man kann zeigen, dass diese $\frac{(4!)^6}{2}$ beträgt. Die Mächtigkeit der Menge W_O der optisch unterscheidbaren Würfelpositionen beträgt also

$$\begin{aligned}
 |W_O| &= \frac{8! \cdot 24! \cdot 24!}{2} \cdot 3^7 \cdot \frac{2}{(4!)^6} \\
 &= \frac{8! \cdot 24! \cdot 24! \cdot 3^7}{(4!)^7} \\
 &= 177.628.724.197.557.644.876.978.255.387.965.784.064.000.000.000 \\
 &\approx 1,8 \cdot 10^{47}
 \end{aligned}$$

Zusätzlich könnte man noch alle Positionen herausdividieren, die durch Drehungen des gesamten Würfels ineinander überführt werden können, denn sie werden intuitiv auch als identisch interpretiert. So ergibt sich folgende Zahl für die Menge W'_O der optisch unterscheidbaren Positionen ohne Berücksichtigung der Würfellage:

$$\begin{aligned}
 |W'_O| &= \frac{8! \cdot 24! \cdot 24!}{2} \cdot 3^7 \cdot \frac{2}{(4!)^6} \cdot \frac{1}{24} \\
 &= \frac{8! \cdot 24! \cdot 24! \cdot 3^7}{(4!)^7} \\
 &= 7.401.196.841.564.901.869.874.093.974.498.574.336.000.000.000 \\
 &\approx 7,4 \cdot 10^{45}
 \end{aligned}$$

5 Die maximale Ordnung

Die zweite Leitfrage des Projekts war die nach der maximalen Ordnung eines Rubikwürfelmanövers. Als Ordnung eines Manövers $M \in \mathcal{M}$ bezeichnen wir dabei die Ordnung der von diesem bewirkten echten Bewegung $m = \psi(\Phi(M))$ als Element von W . Anschaulich gibt die Ordnung eines Manövers an, wie oft man dieses hintereinander ausführen muss, um wieder den Ausgangszustand zu erhalten. Um Verwechslungsgefahr zu vermeiden, wird diese Ordnung im Folgenden auch Gesamtordnung genannt.

Zunächst haben wir überlegt, wovon die Ordnung einer Bewegung abhängt und was man über diese mit möglichst wenigen Kenntnissen über das die Bewegung verursachende Manöver aussagen kann. Ähnlich wie wir den 4-Würfel als solchen in Ecken-, Kanten- und Mittensteine und eine Bewegung in Ecken-, Kanten-, Mittenpermutation und Flips aufgeschlüsselt haben, haben wir die Auswirkungen der Permutationen und der Flips auf die Ordnung einzeln betrachtet und die Ordnung so als Produkt aus einer „Permutationsordnung“ mit einem „Flipfaktor“ dargestellt. Da drei verschiedene Steintypen permutiert werden, war es zusätzlich möglich, Teilordnungen bezogen auf die Permutation nur einer Steinart zu definieren, sodass sich die Permutationsordnung als kleinstes gemeinsames Vielfaches dieser Teilordnungen ergibt.

Auf diese Weise konnten wir die Ordnung aus mehreren „Bausteinen“, die jeweils eng mit einem bestimmten Bewegungsaspekt zusammenhängen, berechnen, was den Grundstein für die Suche nach der höchstmöglichen Ordnung eines Manövers legte. Das Ergebnis und die zu ihm führende Vorgehensweise werden nun näher dargestellt.

5.1 Die Permutationsordnung

Zunächst sollen die Flips vereinfachend ignoriert werden. Von Bedeutung sind dann nur die Permutationen, wodurch sich ein anderer Ordnungsbegriff ergibt, den wir *Permutationsordnung* ord_{EKM} nennen. Die Permutationsordnung gibt an, wie oft man eine Bewegung mindestens hintereinander ausführen muss, um eine Position zu erhalten, in der alle Steine wieder so platziert sind wie in der Ausgangsposition, berücksichtigt anders als die Gesamtordnung Unterschiede durch die Flips also nicht. Da es Ecken-, Kanten- und Mittenpermutationen gibt, definieren wir zunächst drei nur auf je einen Steintyp bezogene Teilordnungen.

Definition (Eckenordnung). $ord_E(M) := \min\{n \in \mathbb{N} | P_E(m)^n = id\}$

Definition (Kantenordnung). $ord_K(M) := \min\{n \in \mathbb{N} | P_K(m)^n = id\}$

Definition (Mittenordnung). $ord_M(M) := \min\{n \in \mathbb{N} | P_M(m)^n = id\}$

Anschaulich gibt die Eckenordnung an, wie oft eine Bewegung mindestens wiederholt werden muss, bis alle Eckensteine wieder so permutiert sind wie im Ausgangszustand; entsprechendes gilt für Kanten- und Mittenordnung.

Die Permutationsordnung gibt an, nach wie vielen Ausführungen zum ersten Mal Ecken-, Kanten- und Mittensteine wieder so permutiert sind wie im Ausgangszustand; formal ist die Permutationsordnung also definiert via

Definition (Permutationsordnung).

$$ord_{EKM}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} | P_E(m)^n = id \wedge P_K(m)^n = id \wedge P_M(m)^n = id\}.$$

Zwischen der Permutationsordnung und den einzelnen Teilordnungen gilt nun der einfache Zusammenhang

$$ord_{EKM}(M) = \text{kgV}(ord_E(M), ord_K(M), ord_M(M)).$$

5.2 Mögliche Permutationsordnungen

Um die maximale Ordnung zu bestimmen, müssen wir dazu in der Lage sein, diejenigen Werte, die die Permutationsordnung einer Bewegung annehmen kann, zu bestimmen. Dies ist über die folgende elementare Überlegung möglich: ein n -Zykel hat Ordnung n , ein Produkt aus disjunkten $n-, k-, l-, \dots$ -Zykeln hat Ordnung $kgV(n, k, l, \dots)$. Für eine Eckenpermutation aus \mathcal{S}_8 gilt zudem die Einschränkung $n + k + l + \dots \leq 8$, da nur 8 Elemente permutiert werden können und die Zykel disjunkt sein sollen; entsprechend gilt für Kanten- und Mittenpermutation aus \mathcal{S}_{24} die Einschränkung $n + k + l + \dots \leq 24$. Nun müssen nur noch alle diese Bedingungen erfüllenden Kombinationen von disjunkten Zykeln und deren kgV berechnet werden, was wir mit einem selbstgeschriebenen Computerprogramm erledigten; es ergaben sich als mögliche Ordnungen:

- für ein Element aus \mathcal{S}_8 : 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 12; 15
- für ein Element aus \mathcal{S}_{24} : 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 26; 28; 30; 33; 34; 35; 36; 38; 39; 40; 42; 44; 45; 48; 51; 52; 55; 56; 57; 60; 63; 65; 66; 68; 70; 72; 76; 77; 78; 80; 84; 85; 88; 90; 91; 95; 99; 102; 104; 105; 110; 112; 114; 117; 119; 120; 126; 130; 132; 140; 143; 154; 156; 165; 168; 170; 180; 182; 195; 198; 204; 210; 220; 231; 234; 240; 252; 260; 264; 273; 280; 308; 312; 315; 330; 360; 364; 385; 390; 396; 420; 440; 462; 504; 630; 660; 840.

Mögliche Permutationsordnungen sind also alle kgV dreier der obigen Werte, wobei ein Wert aus der ersten Liste (Eckenordnung) und zwei Werte aus der zweiten Liste (Kanten- und Mittenordnung) stammen müssen. Auch dies haben wir computer-gestützt berechnet; als höchste Permutationsordnungen ergaben sich 360360 und 255255 und zwar als Ergebnis folgender kgV :

$$\begin{array}{ll}
 kgV(5, 143, 504) = 360360, & kgV(5, 504, 143) = 360360, \\
 kgV(7, 117, 440) = 360360, & kgV(7, 440, 117) = 360360, \\
 kgV(7, 143, 360) = 360360, & kgV(7, 360, 143) = 360360, \\
 kgV(7, 234, 440) = 360360, & kgV(7, 440, 234) = 360360, \\
 kgV(8, 117, 385) = 360360, & kgV(8, 385, 117) = 360360, \\
 kgV(8, 143, 315) = 360360, & kgV(8, 315, 143) = 360360, \\
 kgV(8, 143, 630) = 360360, & kgV(8, 630, 143) = 360360, \\
 kgV(8, 234, 385) = 360360, & kgV(8, 385, 234) = 360360, \\
 kgV(10, 143, 504) = 360360, & kgV(10, 504, 143) = 360360, \\
 kgV(15, 143, 504) = 360360, & kgV(15, 504, 143) = 360360, \\
 kgV(15, 119, 143) = 255255, & kgV(15, 143, 119) = 255255.
 \end{array}$$

Von Ecken- und Mittenordnung lassen sich, wie oben dargestellt, Rückschlüsse auf die (disjunkten) Zykel, aus denen eine Permutation mit dieser Ordnung besteht, ziehen; kennt man die Zykellängen, ist wiederum eine Aussage über das Signum möglich, sodass wir entscheiden konnten, für welche der obigen Kombinationen es auch eine Bewegung, die die Signum-Bedingung erfüllt, gibt. Dies ist nur für die folgenden kgV der Fall:

$$\begin{array}{l}
 kgV(5, 504, 143) = 360360, kgV(7, 440, 117) = 360360, \\
 kgV(7, 360, 143) = 360360, kgV(8, 143, 630) = 360360, \\
 kgV(10, 143, 504) = 360360, kgV(15, 504, 143) = 360360, \\
 kgV(15, 119, 143) = 255255, kgV(15, 143, 119) = 255255.
 \end{array}$$

Es wurde damit aber keineswegs bereits 360360 als die gesuchte maximale Ordnung gefunden, denn bis jetzt wurden die Flips ignoriert. Mit dem Einfluss der Flips auf die Ordnung beschäftigt sich der folgende Abschnitt.

5.3 Der Flipfaktor

Entscheidend ist nun die Frage, in welchem Zusammenhang die oben definierte Permutationsordnung mit der Gesamtordnung, die auch Flips berücksichtigt, steht.

Da gleiche Permutationen wie im Ausgangszustand nur nach einer Anzahl von Ausführungen, die ein natürliches Vielfaches der Permutationsordnung ist, auftreten, ist die Gesamtordnung immer ein natürliches Vielfaches der Permutationsordnung. Wir können also schreiben $ord(M) = ord_{EKM}(M) \cdot f$, wobei $f \in \mathbb{N}$ der natürliche Faktor ist, um den sich die Ordnung von der Permutationsordnung unterscheidet; f nennen wir *Flipfaktor*. Es stellt sich heraus, dass immer entweder $f = 1$ oder $f = 3$ gilt, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

5.3.1 Betrag des Flipfaktors

Für jedes Manöver $M \in \mathcal{M}$ ist die vom Manöver $M' := M^{ord_{EKM}(M)}$ bewirkte Bewegung $m' \in \Psi$ ein reiner Flip, es gilt also immer $m' \in F$. Wegen der in Abschnitt 3 angesprochenen Isomorphie folgt für jedes $m' \neq id$ unmittelbar $ord(m') = 3$ und für $m' = id$ trivialerweise $ord(m') = 1$.

Daraus folgt, dass entweder $ord(M) = ord_{EKM}(M) \cdot 3$ oder $ord(M) = ord_{EKM}(M) \cdot 1$ gilt, d. h. immer entweder $f = 3$ oder $f = 1$.

Interessant ist nun, wovon der Betrag des Flipfaktors abhängt und wie man bestimmen kann, welcher Flipfaktor wann gilt.

5.3.2 Eine Anwendungsregel für den Flipfaktor

Wir konnten zeigen, dass für bestimmte Manöver immer $f = 1$ gilt, nämlich immer dann, wenn der Quotient aus Permutations- und Eckenordnung eines Manövers durch drei teilbar ist. Formal:

$$\forall M \in \mathcal{M} : \left(\frac{ord_{EKM}(M)}{ord_E(M)} \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow X(m^{ord_{EKM}(M)}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow f = 1 \right).$$

Hierzu wurde prinzipiell dieselbe Überlegung wie zur Bestimmung der möglichen Werte des Flipfaktors angewandt, wobei ausgenutzt wurde, dass für beliebige $M \in \mathcal{M}$ bereits jedes Manöver $M^* := M^{ord_E(M)}$ ein reiner Flip ist.

Für Manöver $M \in \mathcal{M}$, die obige Bedingung nicht erfüllen, ist eine Aussage über den Flipfaktor nur bei konkreter Kenntnis des Manövers durch Bestimmung der von diesem Manöver verursachten Bewegung $m \in W$ möglich. Hierzu schreibt man $P_E(m)$ zunächst in disjunkten Zykeln; anschließend bildet man für jede im Zykel vorkommende Zahl i die Summe der Eckenflipzustände x_i – genau dann, wenn sich als Summe eine durch drei teilbare Zahl ergibt, sind nach einem vollständigen Durchlaufen des Zyklus (d. h. n -maligem Hintereinanderausführen eines n -Zykels) keine Eckenflips mehr vorhanden. Diese Gesetzmäßigkeit lässt sich mit der Verknüpfungsvorschrift \oplus für Flips begründen (vgl. Abschnitt 3).

Damit ist das nötige Handwerkszeug zur Bestimmung der maximalen Ordnung vorhanden. Die in Abschnitt 5.2 gefundenen höchsten Permutationsordnungen werden zunächst darauf überprüft, ob sie die Bedingung für die Gültigkeit von $f = 1$ erfüllen. Für die höchste dann noch übrig bleibende Permutationsordnung wird dann überprüft, ob es ein Manöver mit $f = 3$ gibt.

5.4 Die maximale Ordnung und das Rekordmanöver

Als erstes wird überprüft, für welche möglichen höchsten Permutationsordnungen (siehe 5.2) sofort $f = 1$ folgt.

$$\frac{360360}{5} = 72072 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\frac{360360}{7} = 51480 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\frac{360360}{8} = 45045 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\frac{360360}{10} = 36036 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\frac{360360}{15} = 24024 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$\frac{255255}{15} = 17017 \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Für alle Möglichkeiten, die eine Permutationsordnung von 360360 besitzen, ist also $f = 1$. Entscheidend ist also, ob es eine echte Bewegung (und damit auch ein Manöver) mit Permutationsordnung 255255 gibt, für die $f = 3$ gilt; dann wäre eine maximale Ordnung von $255255 \cdot 3 = 765765$ erreicht.

Betrachten wir hierzu die echte Bewegung z_{max} gegeben durch

$$\begin{aligned} P_E(z_{max}) &= (1\ 8\ 6\ 4\ 5)(2\ 3\ 7), \\ P_K(z_{max}) &= (9b\ 8b\ 12b\ 9a\ 8a\ 12a\ 5a\ 11a\ 3a\ 10b\ 7b)(1a\ 4b\ 2a\ 6a\ 3b\ 10a\ 5b\ 7a\ 11b\ 2b\ 6b\ 4a\ 1b), \\ P_M(z_{max}) &= (6d\ 5a\ 6a\ 2b\ 3a\ 6c\ 5d)(4b\ 4d\ 1b\ 5b\ 3d\ 6b\ 1c\ 5c\ 4a\ 4c\ 1a\ 3c\ 2a\ 2d\ 2c\ 3b\ 1d), \\ X(z_{max}) &= (0, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 0), \end{aligned}$$

mit $ord_{EKM}(z_{max}) = 255255$. Mit dem in 5.3.2 dargestellten Verfahren zeigt sich, dass für z_{max} tatsächlich $f = 3$ gilt. Das bedeutet, dass die Ordnung $255255 \cdot 3 = 765765$ erreicht werden kann und maximal ist. Somit wurde die Antwort auf die letzte Leitfrage des Projekts gefunden.

Schön wäre, wenn man auch ein Manöver, das diese Bewegung z_{max} bewirkt, angeben könnte. Mithilfe des Computer-Algebra-Systems GAP fanden wir ein solches Manöver Z_{max} mit

$$Z_{max} := O_1 \circ L_1 \circ L_2 \circ H_2^{-1} \circ W_R^{-1},$$

wobei W_R die Drehung des gesamten Würfels wie bei R bedeutet und $z_{max} = \psi(\Phi(Z_{max}))$ gilt.

Dies bedeutet also anschaulich, dass ausgehend vom gelösten Würfel Z_{max} 765765 Mal hintereinander ausgeführt werden müsste, um wieder den gelösten Würfel zu erhalten. Da Z_{max} wiederum aus fünf Einzeldrehungen besteht, wären zur manuellen Überprüfung dieses Resultats unter der Annahme, dass eine Drehung pro Sekunde ausgeführt werden kann, $765765 \cdot 5\ s = 3828825\ s \approx 44,3$ Tage ununterbrochenen Würfeldrehens erforderlich.

6 Schlusswort

Abschließend sollen die wichtigsten Ergebnisse des Projekts noch einmal zusammenfassend dargestellt werden:

- optisch identische Mittensteine sind ununterscheidbar
- optisch identische Kantensteine sind unterscheidbar
- Regel, nach der entschieden kann, ob eine theoretisch denkbare Bewegung und damit eine theoretisch denkbare Würfelposition durch Manöver erreichbar ist
- es gibt ca. $1,7 \cdot 10^{55}$ mathematisch verschiedene Würfelpositionen
- es gibt ca. $1,8 \cdot 10^{47}$ optisch verschiedene Würfelpositionen, wenn man Positionen, die nur durch Drehung des gesamten Würfels ineinander überführt werden können, als optisch nicht identisch betrachtet
- es gibt ca. $7,4 \cdot 10^{45}$ optisch verschiedene Würfelpositionen, wenn man Positionen, die nur durch Drehung des gesamten Würfels ineinander überführt werden können, als optisch identisch betrachtet
- die maximale Ordnung eines Würfelmanövers beträgt 765765

Nicht alle diese Ergebnisse sind neu. Dass man Rubikwürfel mit gruppentheoretischen Mitteln beschreiben kann, wurde nach Bekanntwerden des kleineren 3-Rubikwürfels in den 1980er Jahren schnell erkannt und es entstanden zahlreiche Veröffentlichungen zur Mathematik des Rubikwürfels [2][3][4]. Zum 4-Würfel, der unter dem Namen „Rubik’s Revenge“ vermarktet wird, ist weniger Literatur vorhanden – es finden sich vor allem Anleitungen zur Lösung des Würfels und hierfür interessante Informationen. Auch Zahlen zur Anzahl der Würfelpositionen werden mitunter angegeben [8], wobei nicht immer dieselbe Zahl angegeben wird – ein Befund, den wir nun durchaus nachvollziehen können. Ebenso sind die Bedingungen, anhand derer man entscheiden kann, ob eine theoretisch denkbare Bewegung auch tatsächlich durch Manöver realisierbar ist, bekannt, wenn auch oft nicht klar formuliert.

Unsere Leistung dürfte vor allem in einer exakten mathematischen Beschreibung des Würfels und seiner Veränderungen liegen; auch die maximale Ordnung scheint ein neues Ergebnis zu sein. Gleichwohl haben wir längst nicht alle interessanten Fragen beantwortet – gerade der zunächst als am natürlichsten erscheinende Wunsch, den Würfel möglichst schnell lösen zu können, spielte in unserem Projekt keine Rolle. Interessant wäre beispielsweise, wie man bei gegebener Ausgangsposition eine möglichst effektive Lösung findet, d. h. ein Manöver mit minimaler Länge, und wie lang eine solche kürzestmögliche Lösung maximal sein kann.

Literatur

- [1] Bosch, Siegfried: Algebra (6. Auflage), Berlin 2006
- [2] Bandelow, Christoph: Einführung in die Cubologie, Wiesbaden 1981
- [3] Hofstadter, Douglas R.: The Magic Cube's cubies ... Scientific American 3/1981, 20-38
- [4] Frey, Alexander H. jr./Singmaster, David: Handbook of Cubik Math, Enslow, 1982
- [5] <http://randelshofer.ch/>: 03.01.2008; Randelshofer, Werner
- [6] <http://de.wikipedia.org/wiki/Zauberwürfel>: 03.01.2008; der Zauberwürfel
- [7] http://en.wikipedia.org/wiki/Rubik's_Cube: 03.01.2008; Rubik's Cube
- [8] http://en.wikipedia.org/wiki/Rubik's_Revenge: 03.01.2008; Rubik's Revenge
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/Rubik's_Cube_group: 03.01.2008; Rubik's Cube Group